DERS 7

En Küçük Kareler Yöntemi

7.1. En Küçük Kareler Yöntemi. Gerçek yaşamın çeşitli alanlarında herhangi bir uygulama ile toplanan veriler tablo şekline getirilerek incelenir ve toplanan veriyi modelleyen bir fonksiyon bulunmaya çalışılır. Çoğu zaman bu veri tablosuna tam olarak uyan bir fonksiyon bulmak mümkün olmaz; veri tablosuna **en iyi uyan** fonksiyon belirlenmeye çalışılır. Bir veri tablosuna **en iyi uyan** fonksiyonu bulma sürecine **regresyon analizi** denir.

Regresyon analizi yaparken en çok kullanılan yöntemlerden biri **en küçük kareler yöntemi**dir. Büyük matematikçi C. F. Gauss'un 18 yaşındayken (1795) geliştirdiği bu yöntem, ilk kez 1801 de Cres astroidinin yörüngesinin belirlenmesinde kullanılmış ve ilk kez Gauss'un toplu eserlerinin yayınlandığı ciltlerden ikincisinde 1809 yılında yayınlanmıştır. Fransız matematikçi A. Legendre 1805 ve Amerikalı matematikçi R. Adrain de 1808 yıllarında aynı yöntemi Gauss'dan habersiz ve bağımsız olarak keşfetmişlerdir.

En küçük kareler yöntemi, tıp, finans, mühendislik, ziraat, biyoloji ve sosyoloji gibi çeşitli bilim dallarında çeşitli değişkenler arasındaki ilişkiler belirlenirken kullanılan en önemli araçlar arasındadır.

Belli ölçümler sonucunda $i = 1, 2, \ldots, n$ için (x_i, y_i) verileri elde edilmiş olsun. Burada, her bir y_i nin x_i ye bağlı olarak değiştiği varsayılmaktadır. (x_i, y_i) düzlemde noktalar olarak düşünüldüğünde, pratikte bu noktalar düzgün bir eğri üzerinde, başka bir deyimle, bilinen bir fonksiyonun grafiği üzerinde bulunmazlar. Hatta bazı durumlarda, (x_i, y_i) ler arasında ne tür bir bağıntı bulunduğu dahi bilinmeyebilir. Ancak, yapılan ölçümlerin doğası gereği, her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $y_i = f(x_i)$ olacak biçimde bir fonksiyonun var olduğu, ölçümlerde yapılan hata nedeniyle bu eşitliklerin bazıları veya hepsinin sağlanmadığı kabul edilebilir. Bu düşünceyle, ölçülen y_i değeri $f(x_i)$ için yaklaşık değer kabul edilerek bu yaklaşımdaki hatanın minimum olduğu f fonksiyonu belirlenmeye çalışılır. Bu amacı gerçekleştirmek için f fonksiyonunun bir takım parametrelere bağlı bir ifadesi bulunduğu varsayılıp eldeki veriler yardımıyla bu parametreler belirlenmeye çalışılır. Örneğin, f fonksiyonu

$$y = f(x) = mx + b$$

ifadesinde olduğu gibi bir doğrusal fonksiyon veya

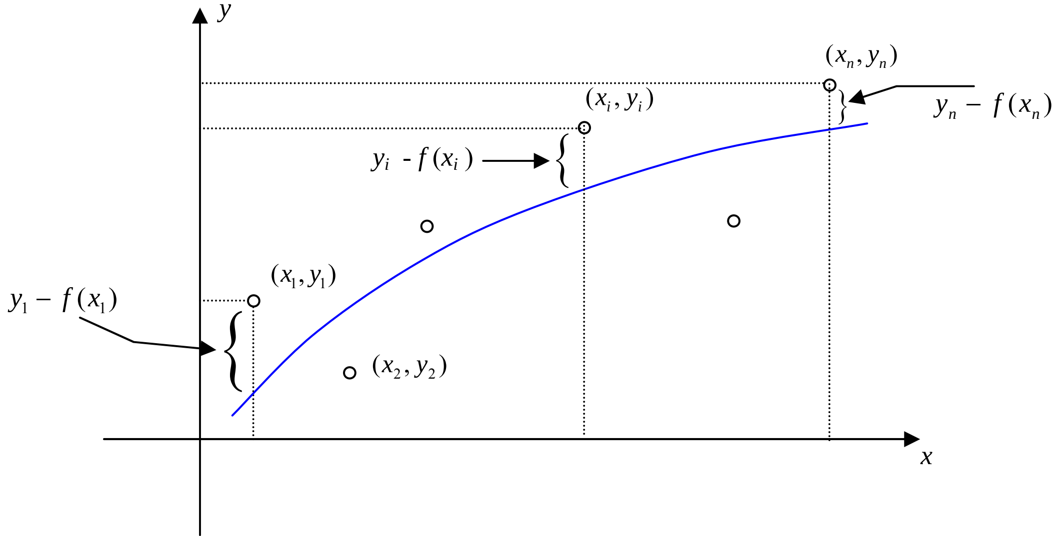
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

ifadesinde olduğu gibi bir karesel fonksiyon olabilir ki bu durumda belirlenmesi gereken parametereler a, b, c, m dir.

y_i değeri $f(x_i)$ için yaklaşık değer, $f(x_i) \approx y_i$, kabul edilince yapılan hata

$$y_i - f(x_i)$$

dir ve amaç, bu hatalar minimum olacak şekilde bir f fonksiyonu bulmaktır(Aşağıdaki şekilden izleyiniz).



Tanım 1. $y_i - f(x_i)$ farklarından her birine bir **artık** denir.

En küçük kareler yönteminde aranan fonksiyon, ya da onun parametreleri, tüm artıkların kareleri toplamı olan

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 = (y_1 - f(x_1))^2 + \cdots + (y_n - f(x_n))^2$$

ifadesini minimum yapacak şekilde belirlenir. Bu, yönteme neden en küçük kareler yöntemi dendiğini açıklar. Sözü edilen kareler toplamının minimum olması için her bir hatanın küçük olması gerektiğine dikkat ediniz.

Bu dersimizde, bir veri tablosuna en iyi uyan doğrusal fonksiyonların bulunmasında en küçük kareler yönteminin nasıl kullanıldığını örnekleriyle göreceğiz.

Tanım 2. Bir veri tablosuna en iyi uyan doğrusal fonksiyonun grafiği olan doğruya **regresyon doğrusu** veya **en küçük kareler doğrusu** denir.

7.2. Regresyon doğrusu. Her $i = 1, 2, . . . , n$ için (x_i , y_i) verilmiş olsun. Şimdi, bu verilere en iyi uyan

$$y = f(x) = mx + b$$

fonksiyonunun belirlediği doğruyu yani regresyon doğrusunu nasıl bulacağımızı göreceğiz. Önce $y_i - f(x_i)$ artık değerleri bulunarak bunların karelerinin toplamı olan

$$F(m,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2 = (y_1 - mx_1 - b)^2 + \cdots + (y_n - mx_n - b)^2$$

fonksiyonu oluşturulur. Her m ve b için $F(m , b) \geq 0$ olduğundan ve $y = f(x) = mx + b$ doğrusu verilen noktalardan uzaklaştıkça $F(m , b)$ sonsuza ıraksayacağından, $F(m , b)$ nin bir mutlak minimum değeri vardır ve bu minimum değer $F(m , b)$ fonksiyonunun bir kritik noktasında ortaya çıkar.

Örnek 1. Bir üretici, ürettiği ürünün çeşitli üretim seviyeleri için maliyetini belirliyor ve aşağıdaki tabloyu oluşturuyor:

Ürün sayısı (x yüz)	2	5	6	9
Maliyet (y bin YTL)	4	6	7	8

Bu üretici için gider fonksiyonunu yukarıdaki tabloya en iyi uyan doğrusal fonksiyon olarak belirleyelim.

Elimizdeki veri tablosu, düzlemde şu (x,y) noktalarını verir: (2,4) , (5,6) , (6,7) ve (9,8). Bu noktaların hepsini üzerinde bulunduran bir doğru yoktur. Amacımız, bu noktalara en iyi uyan doğruyu, yani regresyon doğrusunu bulmaktır. Regresyon doğrusunun denklemi

$$y=C(x) = mx+b$$

m ve b belirlenerek bulunacaktır.

Artıkları hesaplayalım ve veri tablomuzu aşağıdaki gibi genişletelim.

Ürün sayısı (x yüz)	2	5	6	9
Maliyet (y bin YTL)	4	6	7	8
$mx + b$	$2m + b$	$5m + b$	$6m + b$	$9m + b$
y -_ mx - b	4 - 2m - b	6- 5m - b	7- 6m - b	8 - 9m - b

Artıkların kareleri toplamı aşağıdaki iki değişkenli fonksiyonu tanımlar:

$$F(m,b)=(4-2m-b)^2 + (6-5m-b)^2 +(7-6m-b)^2 +(8-9m-b)^2.$$

Bu fonksiyonun hangi m ve b değerleri için minimum değeri aldığını belirlemeliyiz.

Kısmi türevleri hesaplayalım:

$$F_m(m,b)=2(4-2m-b)(-2)+2(6-5m-b)(-5)+2(7-6m-b)(-6) +2(8-9m-b)(-9)=0,$$

$$F_b(m,b)=2(4-2m-b)(-1)+2(6-5m-b)(-1)+2(7-6m-b)(-1) +2(8-9m-b)(-1)=0.$$

Bir miktar aritmetik işlemden sonra aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} 146m + 22b = 152 \\ 22m + 4b = 25 \end{cases}$$

Bu sistemi yoketme yöntemi ile çözelim. İkinci denklem -11/2 ile çarpılıp birinci denkleme toplanırsa

$$25m = 14.5 \quad \Rightarrow m = 0.58$$

ve m nin bu değeri ikinci denklemde yerine konulursa

$$12.76 + 4b = 25 \;\Rightarrow 4b = 11.24 \quad \Rightarrow b = 3.06$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, sistemin tek çözümü vardır: $m = 0.58$, $b = 3.06$. m ve b nin bu değerleri için $F(m,b)$ nin minimum olduğunu biliyoruz.

O halde regresyon doğrusu

$$y=0.58x+3.06$$

dur. Başka bir deyimle, regresyon analizi sonucu ortaya çıkan gider fonksiyonu

$$C(x)=0.58x+3.06$$

Denklemi ile verilenen fonksiyondur. Üretici, örneğin, 4 ürün üretince giderinin ne olacağını tahmin edebilir :

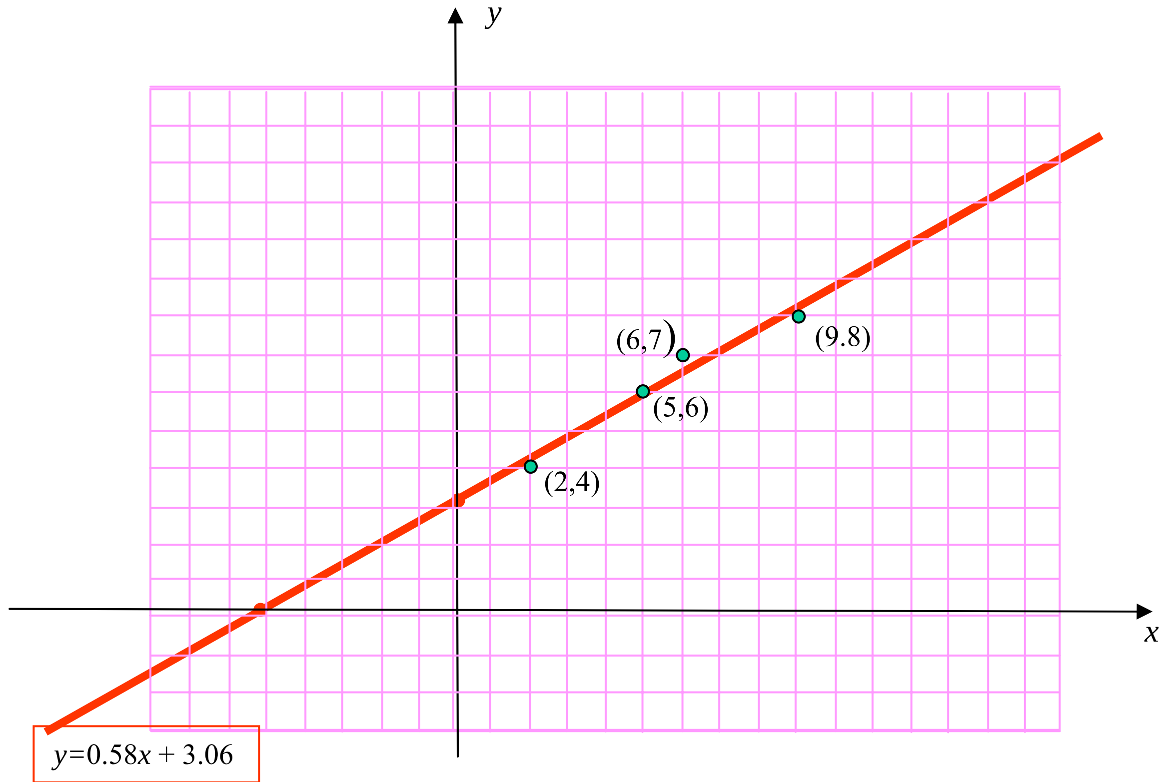
$$C(4)=(0.58)(4)+3.06 =2.32+3.06 = 5.38.$$

Bu örnekle ilgili olarak veri noktalarını ve regresyon doğrusunu gösteren bir grafiği bir sonraki sayfada görebilirsiniz.

Örnek veri tablosu

x	2	5	6	9
y	4	6	7	8

için bulduğumuz regresyon doğrusu veri noktaları ile birlikte aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Önceki örnekte izlenen yol genel duruma uygulanarak m ve b nin doğrudan hesaplanmasını sağlayacak formüller elde edilebilir. Artıkların karelerinin toplamı olarak tanılanan

$$F(m,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2 = (y_1 - mx_1 - b)^2 + \cdots + (y_n - mx_n - b)^2$$

fonksiyonunun kritik noktaları

$$F_m(m,b) = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - mx_i - b)(-x_i) = -2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = 0$$

$$F_m(m,b) = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - mx_i - b)(-1) = -2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m - 2\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)b + 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = 0$$

ya da

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m + \quad nb \quad = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

denklem sistemi çözülerek bulunur.

Bu denklem sisteminin daima tek bir çözümü bulunduğuna dikkat ediniz.

$$m = \frac{n(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k) - (\sum_{k=1}^{n} x_k)(\sum_{k=1}^{n} y_k)}{n(\sum_{k=1}^{n} x_k^2) - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2} \quad , \qquad b = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k - m(\sum_{k=1}^{n} x_k)}{n}.$$

İkinci örneğimizde yukarıdaki formülleri kullanacağız.

Örnek 2. (0 , 6.4), (1 , 2.6), (2 , 0.5), (3 , 0.6) ve (4 , 0.3) veri noktalarına en iyi uyan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm. Aranılan doğrunun denklemi $y = mx + b$ olmak üzere veri noktalarına karşılık gelen aşağıdaki tabloyu oluşturalım:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	6.4	2.6	0.5	0.6	0.3

m ve b yi yukarıdaki formüllerden elde edebilmek için bu formüldeki her bir terimin değerini buluruz. Öncelikle, $n = 5$ olduğuna dikkat ederek

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = 0+1+2+3+4=10 \qquad , \qquad \sum_{k=1}^{5} y_k = 6.4+2.6+0.5+0.6+0.3=10.4$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 0\cdot(6.4)+1\cdot(2.6)+2\cdot(0.5)+3\cdot(0.6)+4\cdot(0.3)=2.6+1+1.8+1.2=6.6$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^{\ 2} = 0+1+4+9+16=30 \qquad , \qquad (\sum_{k=1}^{5} x_k)(\sum_{k=1}^{5} y_k)=10\cdot(10.4)=104$$

Böylece,

$$m=\frac{n(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)-(\sum_{k=1}^{n} x_k)(\sum_{k=1}^{n} y_k)}{n(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)-(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2}=\frac{5\cdot(6.6)-104}{5\cdot 30-100}=\frac{33-104}{50}=\frac{-71}{50}=-1.42,$$

$$b=\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k - m(\sum_{k=1}^{n} x_k)}{n}=\frac{10.4-(-1.42)\cdot 10}{5}=\frac{10.4+14.2}{5}=\frac{24.6}{5}=4.92.$$

O halde istenilen doğrunun denklemi

$$y=-1.42x+4.92$$

dir.

Örnek 1 ve Örnek 2 de görüldüğü üzere regresyon doğrusunun bulunmasında iki yol izlenebilir. Birinci yol, veri noktalarından artıklar ve artıkların kareleri hesaplanarak $F(m,b)$ fonksiyonunun bulunp $F(m,b)$ yi minimum yapan m ve b değerlerinin bulunmasıdır. İkinci yol ise birinci yolun genel duruma uygulanmasıyla m ve b için bulunan formüllerin kullanmasıdır.

Aşağıda regresyon doğrusunun hesaplanması için bazı durumlarda daha elverişli olan bir yöntem daha bulunduğunu göreceğiz.

7.3. Determinantla Çözüm. Regresyon doğrusunun bulunmasında ortaya çıkan denklem sistemi, genel durumda, Cramer Kuralı ile çözülerek, doğrunun denklemi için hesapları kolaylaştırıcı bir formül elede etmek mümkündür.

Artıkları kareleri toplamı olan iki değişkenli

$$F(m,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-mx_i-b)^2=(y_1-mx_1-b)^2+\cdots+(y_n-mx_n-b)^2$$

fonksiyonunun kısmi türevleri sıfıra eşitlenerek ortaya çıkan

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m + \quad nb \quad = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

denklem sistemi Cramer Kuralı ile çözülürse,

$$m = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}} \quad , \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}}$$

elde edilir(b nin son ifadesinin elde edilişini iyi izleyiniz). Böylece, $F(m\ ,\ b)$ nin tam bir

tane kritik noktası bulunduğuna ve bunun da verilere en iyi uyan fonksyonu belirlediğnne dikkat ediniz. O halde aranan fonksiyon,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}} x - \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}}$$

veya

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix} = 0$$

denklemi ile belirlenmektedir. Son formülün sol tarafı, aşağıdaki 3×3 determinantın birinci satıra göre açılımı olduğundan bu denklem

$$\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = 0$$

biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla, regresyon doğrusunu belirlemek için yukarıdaki determinantın son iki satırındaki girdiler bulunup yerine yazılarak determinant açılr ve arzu edilen denklem ortaya çıkar.

Örnek 1. Daha önce çözdüğümüz bir problemin veri tablosu olan aşağıdaki tablo için en küçük kareler doğrusunu determinant kullanarak bulalım.

x	2	5	6	9
y	4	6	7	8

Çözümde kullanacağımız

$$\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = 0$$

determinantın ikinci ve üçüncü satırlarındaki girdileri, sırasıyla, bulalım.

$$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 8+30+42+72 = 152 \;,\; \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 4+25+36+81 = 146 \,,\; \sum_{i=1}^{4} x_i = 2+5+6+9 = 22$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i = 4+6+7+8 = 25 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} x_i = 2+5+6+9 = 22 \quad , \quad n = 4.$$

Böylece,

$$\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ 152 & 146 & 22 \\ 25 & 22 & 4 \end{vmatrix} = (4\cdot 146 - 22\cdot 22)y - (4\cdot 152 - 22\cdot 25)x + (152\cdot 22 - 146\cdot 25) = 0$$

ve buradan, en küçük kareler doğrusunun denklemi

$$100y - 58x - 306 = 0$$

ya da

$$y = 0.58x + 3.06$$

olarak elde edilir.

Örnek 2. Aşağıdaki veri tablosu için en küçük kareler doğrusu(regresyon doğrusu)nu bulunuz ve $x = 15$ için y yi tahmin ediniz.

x	2	6	10	14	18
y	-4	0	8	12	14

Bu tabloya karşılık gelen nokta kümesi

(2,-4), (6,0), (10,8), (14,12), (18,14)

tür. x_1=2 , y_1=-4, ...

Böylece,

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = -8 + 0 + 80 + 168 + 252 = 492 \ , \ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 4 + 36 + 100 + 196 + 324 = 660,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50 \ , \ \sum_{i=1}^{5} y_i = -4 + 0 + 8 + 12 + 14 = 30 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50 \ , \ n = 5.$$

Elde edilen değerler determinant formülünde yerlerine yazılınca

$$\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ 492 & 660 & 50 \\ 30 & 50 & 5 \end{vmatrix} = (5\cdot 660 - 50\cdot 50)y - (5\cdot 492 - 30\cdot 50)x + (492\cdot 50 - 30\cdot 660) = 0$$

ve buradan

$$800y - 960x + 4800 = 0 \;\Rightarrow\; y = 1.2x \text{ -6}$$

bulunur. Böylece, regresyon doğrusunun denkleminin $y = (1.2)x - 6$ olduğu görülür. x=15 için $y = 18 - 6 = 12$ olur.

En küçük kareler yöntemi ile çözülebilecek bir fiyat analizi problemi örneği veriyoruz.

Örnek 3. Bir büyük mağaza zincirinin pazar araştırmaları bölümü belli bir ürünün fiyatını her ay değiştirerek 5 ay boyunca aylık talebi kaydetti ve yandaki veri tablosunu elde etti. Burada, x, birim para(bp) olarak satış fiyatını; y, aylık kaç bin adet talep olduğunu göstermektedir.

x	y
5.0	2
5.5	1.8
6	1.4
6.5	1.2
7.0	1.1

a) En küçük kareler yöntemini kullanarak *fiyat-talep denklem*ini bulunuz.

b) Bir adet ürünün maliyeti 4 bp ise, aylık kârın maksimum olması için satış fiyatı ne olmalıdır?

Çözüm. a) Son elde ettiğimiz determinant formülünü kullanalım. Problemimiz için

$$\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = 0$$

determinantın ikinci ve üçüncü satırlarındaki girdileri

$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 10 + 9.9 + 8.4 + 7.8 + 7.7 = 43.8$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 25 + 30.25 + 36 + 42.25 + 49 = 182.5$,

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 5 + 5.5 + 6 + 6.5 + 7 = 36$, $\sum_{i=1}^{5} y_i = 2 + 1.8 + 1.4 + 1.2 + 1.1 = 7.5$,

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 5 + 5.5 + 6 + 6.5 + 7 = 30$, $n = 5$

tir. Bu değerler yerleştirilince

$$\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ 43.8 & 182.5 & 30 \\ 7.5 & 30 & 5 \end{vmatrix} = (5\cdot 182.5 - 30\cdot 30)y - (5\cdot 43.8 - 30\cdot 7.5)x + (43.8\cdot 30 - 7.5\cdot 182.5) = 0$$

ve buradan

$$12.5y + 6x - 54.75 = 0$$

elde edilir. Böylece fiyat talep denklemi(x fiyatı ve y talebi göstermek üzere)

$$y = -0.48x + 4.38$$

olarak elde edilir.

b) Bir ürünün maliyeti 4 bp ise, başka gider olmadığı varsayılarak, toplam gider,

$$C = 4y = 4(-0.48x + 4.38) = -1.92x + 17.52$$

bp olur. Toplam gelir ise

$$R = yx = -40.8x^2 + 4.38x$$

olacağından, kâr fonksiyonu

$$P = R - C = -0.48x^2 + 4.38x \text{-(-}1.92x + 17.52\text{)=} -0.48x^2 + 6.3x - 17.52$$

olur. Kârın maksimum olması için

$$P' = -0.96x + 6.3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \approx 6.56,$$

satış fiyatı yaklaşık olarak 6.56 bp olmalı.

Problemler 7

1. Aşağıdaki veri tablolarından her biri için en küçük kareler doğrusu(regresyon doğrusu)nu bulunuz. Veri tablosuna karşılık gelen noktaları ve regresyon doğrusunu grafikle gösteriniz.

a)

x	1	2	3	4
y	1	3	4	3

b)

x	1	2	3	4
y	8	5	4	0

c)

x	1	2	3	4
y	2	3	3	2

ç)

x	1	2	3	4	5
y	2	3	3	2	3

2. Aşağıdaki veri tablolarından her biri için en küçük kareler doğrusu(regresyon doğrusu)nu bulunuz ve verilen x değeri için y yi tahmin ediniz.

a)

x	1	2	3	4
y	3	1	2	0

x=2.5 için y yi tahmin ediniz

b)

x	0	5	10	15	20
y	10	22	31	46	51

x=25 için y yi tahmin ediniz

c)

x	-1	1	3	5	7
y	14	12	8	6	5

x=2 için y yi tahmin ediniz

ç)

x	1	4	6	8
y	1	2	3	4

x=5 için y yi tahmin ediniz

3. Bir büyük mağaza zincirinin pazar araştırmaları bölümü belli bir ürünün fiyatını her ay değiştirerek 5 ay boyunca aylık talebi kaydetti ve aşağıdaki veri tablosunu elde etti. Burada, *x*, YTL olarak satış fiyatını; *y*, aylık kaç bin adet talep olduğunu göstermektedir.

x	10	10.5	11	11.5	12
y	8.5	8	7	6	4.5

a) En küçük kareler yöntemini kullanarak *fiyat-talep denklemi*ni bulunuz.
b) Bir adet ürünün maliyeti 7 YTL ise, aylık kârın maksimum olması için satış fiyatı ne olmalıdır?

4. Bir matematik sınıfındaki öğrencilerden 10 unun dönem içi not ortalamaları ile dönem sonu sınavından aldıkları notlar aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Dönem İçi	40	55	62	68	72	76	80	86	90	94
Dönem Sonu	30	45	65	72	60	82	76	92	88	98

Bu tablo için regresyon doğrusunu bulunuz. Dönem içi not ortalaması 70 olan bir öğrencinin dönem sonu sınavından alacağı notu tahmin edininz.

5. (1 , 1.5), (2, 0.8), (3 , 1.7), (4 , 3.8) ve (5 , 7.6) veri noktalarına en iyi uyan doğrunun denklemini bulunuz.

6. (0 , 7.4), (1 , 3.6), (2 , 1.5), (3 , 0.6) ve (4 , 1.3) veri noktalarına en iyi uyan doğrunun denklemini bulunuz.

7. Bir matematik dersinin ilk iki arasınavında 7 öğrencinin aldığı notlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Birinci arasınav : *x*	72	34	96	72	0	37	72
İkinci arasınav : *y*	35	10	85	70	20	10	75

a) Bu verilere en iyi uyn doğrusal fonksiyon $y = mx + b$ için m ve b yi birinci ondalık basamağına yuvarlayarak bulunuz.
b) Birini arasınavdan 49 almış ve ikinci arasınavı kaçırmış bir öğrenci, ikinci arasınava girmiş olsaydı bu sınavdan kaç puan alması beklenirdi?